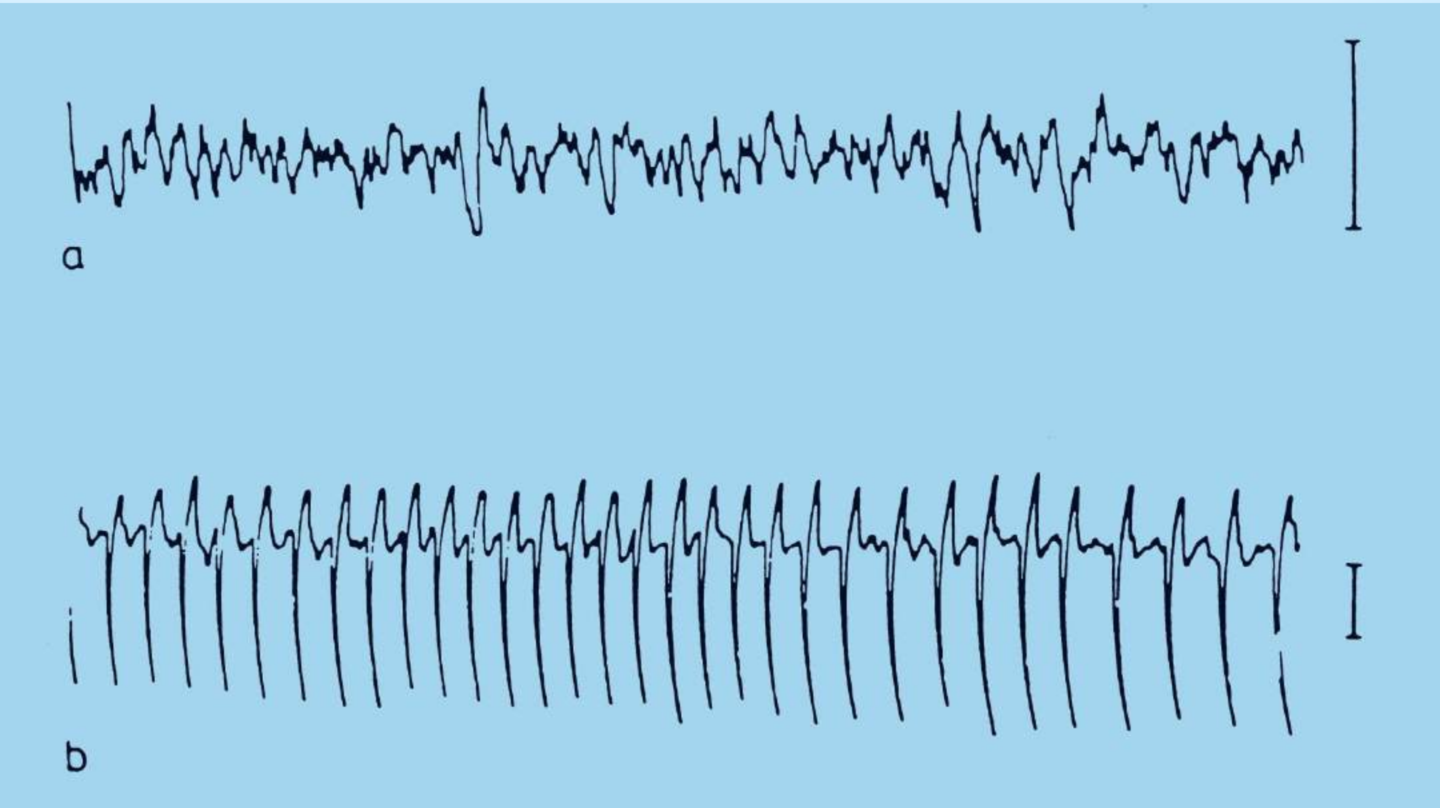
DYNAMISCHE SYSTEME

Hans G. Weidinger

Elektro-Enzephalogramm



Nach H. Haken, DGNÄ Freiburg, WVG 1989

Welches EEG gehört zum gesunden Gehirn?

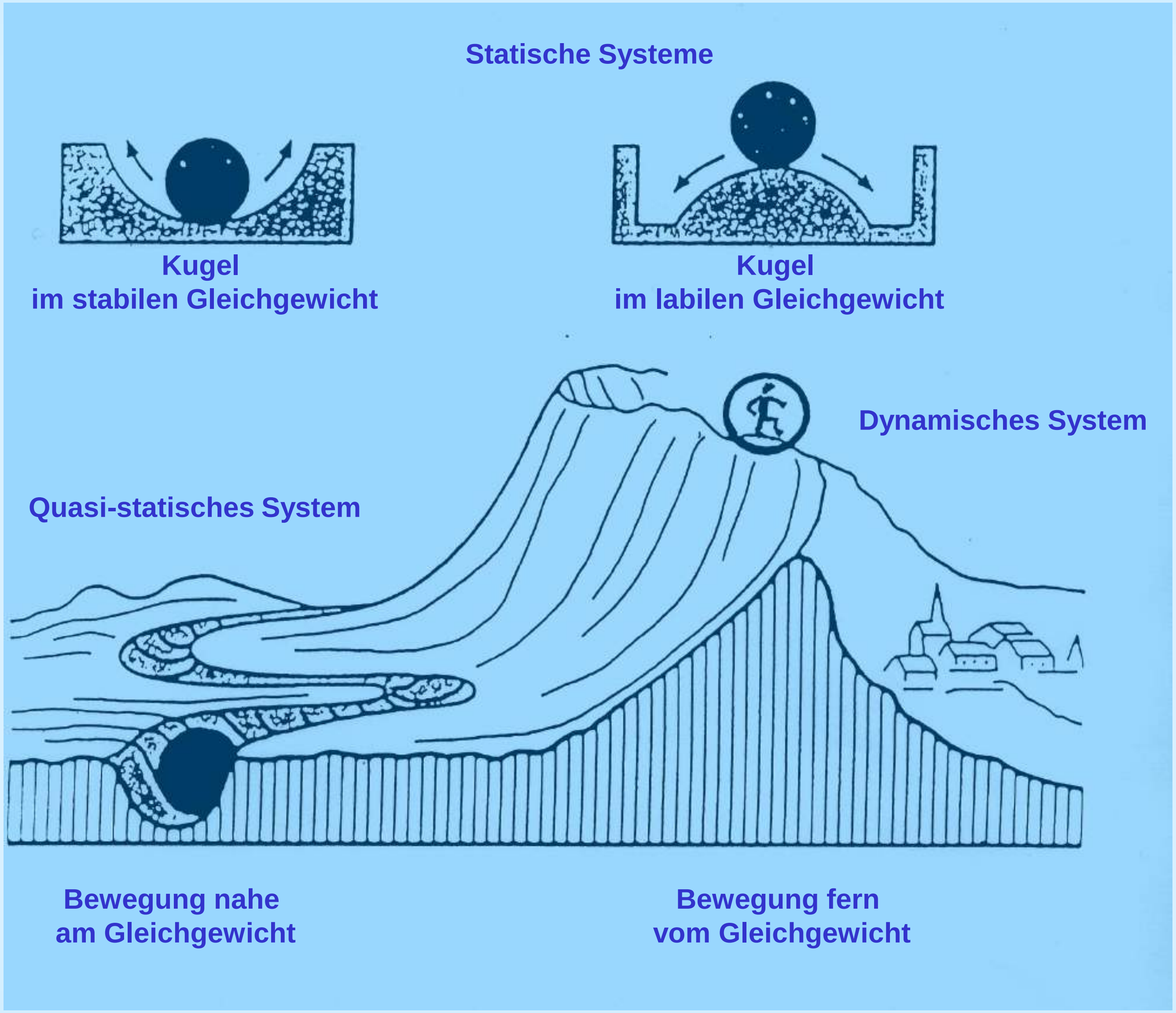
a. EEG bei einem gesunden Menschen

b. EEG bei einem epileptischem Anfall

Das Gehirn ist ein – sehr komplexes – dynamisches System

Es läßt sich nicht mit den uns von statischen oder quasi-statischen Systemen her gewohnten Erscheinungsformen verstehen.

Frage:
Was kennzeichnet ein dynamisches System im Gegensatz zum statischen oder quasistatischen System?



Nach Fr. Cramer „Chaos und Ordnung", DVA 1989

DYNAMISCHE SYSTEME

Statische Systeme existieren
im Gleichgewicht

Quasi-statische Systeme existieren
nahe dem Gleichgewicht

Dynamische Systeme existieren
fern vom Gleichgewicht

Ein bekanntes und populäres dynamisches System ...

... weist alle Merkmale eines stabilen Systems fern vom Gleichgewicht auf:

Der Fahrradfahrer

... Ist im (statischen) Gleichgewicht instabil,

... stabilisiert sich durch Rückkopplung (Regelung) und durch Verbrauch von Energie,

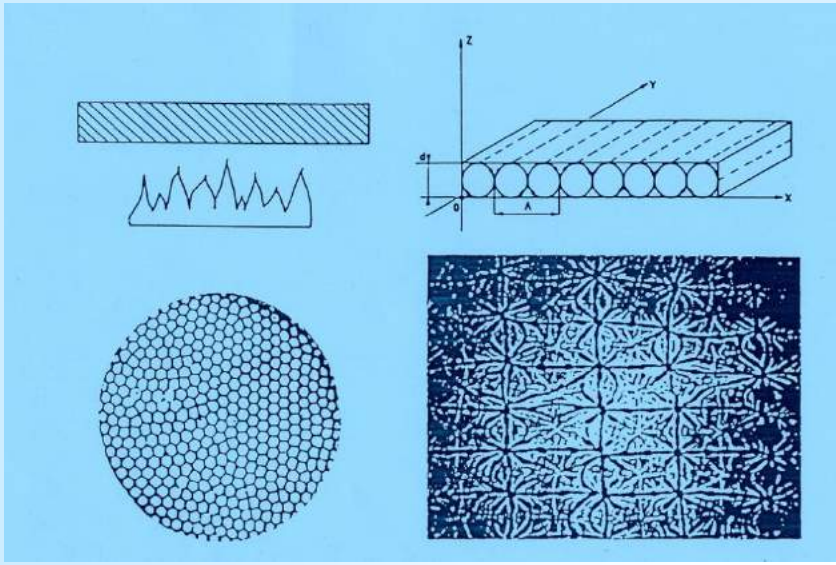
... tauscht mit seiner Umgebung Information aus

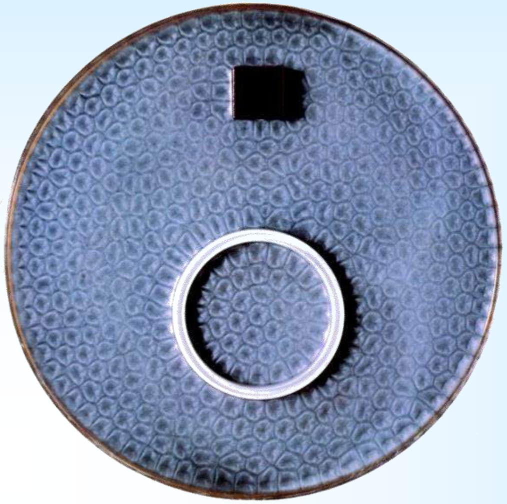
... existiert nur in zeitlich begrenzten Prozessen, d.h. besitzt eine endliche Lebenszeit,

... Und erzeugt dabei komplexe Strukturen

Andere dynamische Systeme:

Die Bénardschen Rollzellen





Einfluß der geometrischen Randbedingungen (Eingrenzung)

Erstarrte Lava-Rollzellen

Spontane Musterbildung in erwärmten Flüssigkeiten

Oben links: flüssige Schicht wird von unten erwärmt, Wäemeleitung bei geringem Wärmeunterschied;

Oben rechts:Bei größerem Wärmeunterschied tritt Konvektion auf: die Bénardschen Rollen entstehen;

Unten links:Die Zellenstruktur von oben gesehen;

Unten rechts: Musterbildung bei erhöhten Temperaturen.

Zum Vergleich:
die immer gleichen Merkmale von dynamischen Systemen:

... Ist im (statischen) Gleichgewicht instabil,

... stabilisiert sich durch Rückkopplung (Regelung) und durch Verbrauch von Energie,

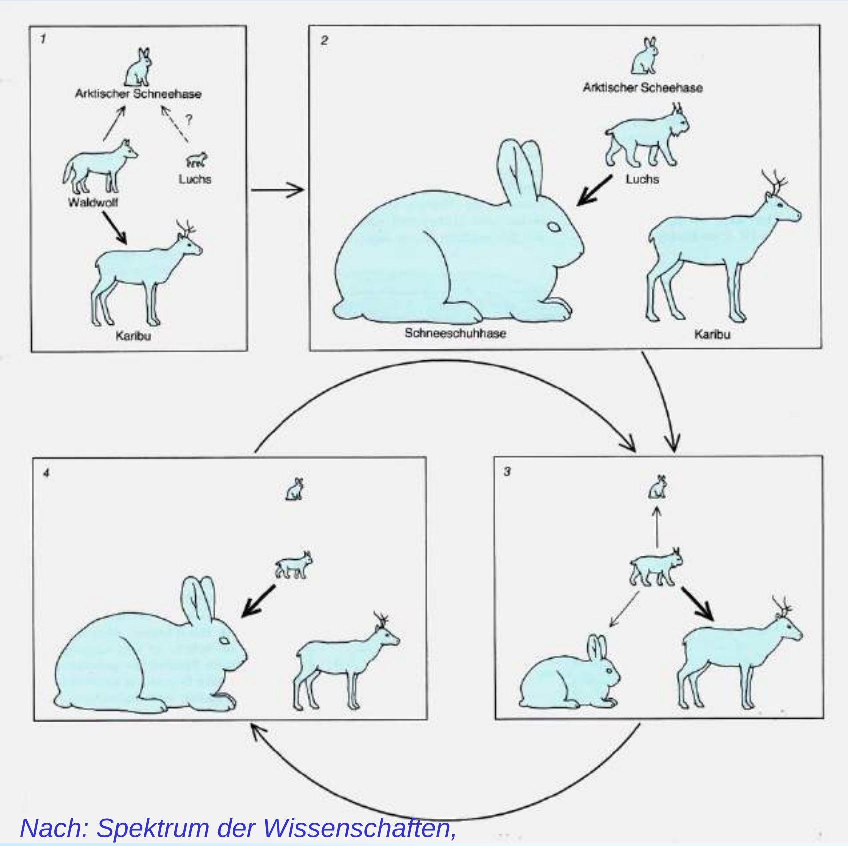
... tauscht mit seiner Umgebung Information aus

... existiert nur in zeitlich begrenzten Prozessen, d.h. besitzt eine endliche Lebenszeit,

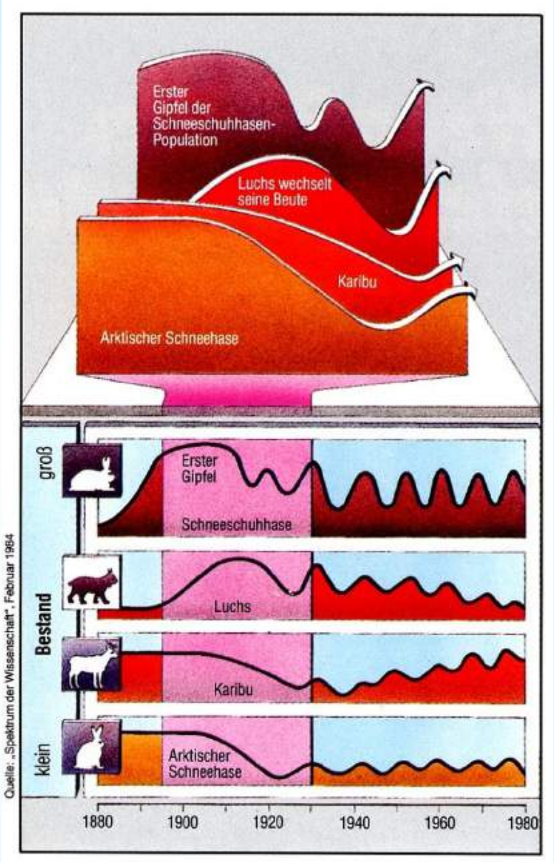
... Und erzeugt dabei komplexe Strukturen

Andere dynamische Systeme:

Die Populationsdynamik von Räuber und Beute



Nach: Spektrum der Wissenschaften, „Chaos und Fraktale", Heidelberg, 1989, S. 83



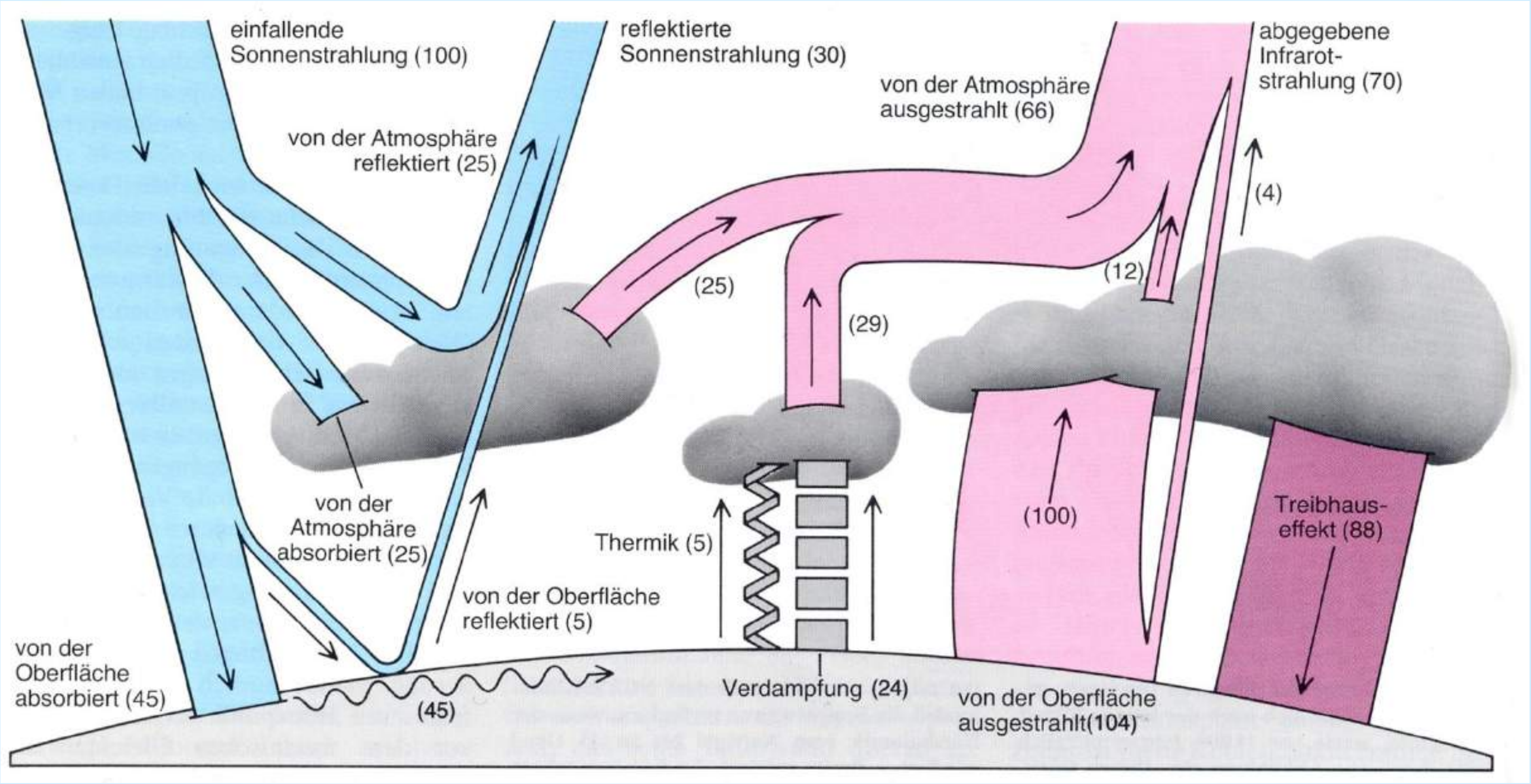
Nach: Geo-wissen, Nr. 3, 1998 „Chaos + Kreativität", S. 90 Gruhner und Jahr AG, Hamburg

Der zyklische Beutewechsel des Luchses in Neufundland

1) Bis Mitte des 19.Jhdt. War der Waldwolf der Hauptfeind der Karibus; vereinzelte Luchse lebten von den arktischen Schneehasen.
2) 1864 wurden Schneeschuhhasen als neue Nahrungsquelle für die Bewohner ausgesetzt, die sich rasch vermehrten. Davon ernährte sich dann auch der Luchs und vermehrte sich rasch. Der Wolf wurde 1911 ausgerottet.
3) Als 1915 die Population der Schneeschuhasen zusammenbrach, wechselten die Luchse auf Karibu-Kälber und wieder arktische Schneehasen und dezimierte die beiden Arten beträchtlich. Inzwischen hatten bei den Schneeschuhhasen periodische Bestandsschwankungen eingesetzt.
4) Bei jedem „Hasengipfel schalteten die Luchse wider auf diese Beute um, so daß sich die Karibu-Population erholen konnte. Jahrzehnte lang wechselte nun de Luchs im 10-Jahres-Rythmus zwischen Karibu und Schneeschuhhasen.

Andere dynamische Systeme:

Klima-Modelle



Nach: Spektrum der Wissenschaften, „Chaos und Fraktale“, Heidelberg, 1989, S. 28

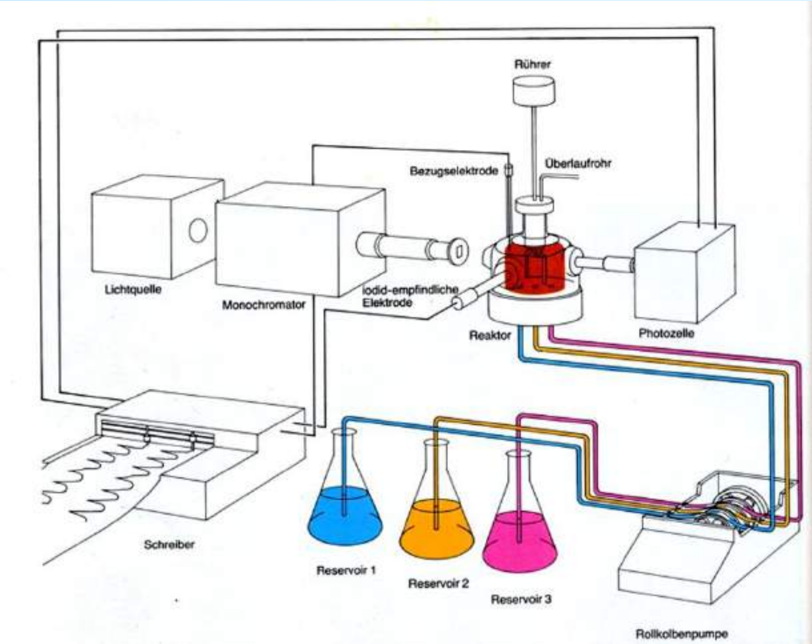
Modell des Treibhaus-Effektes

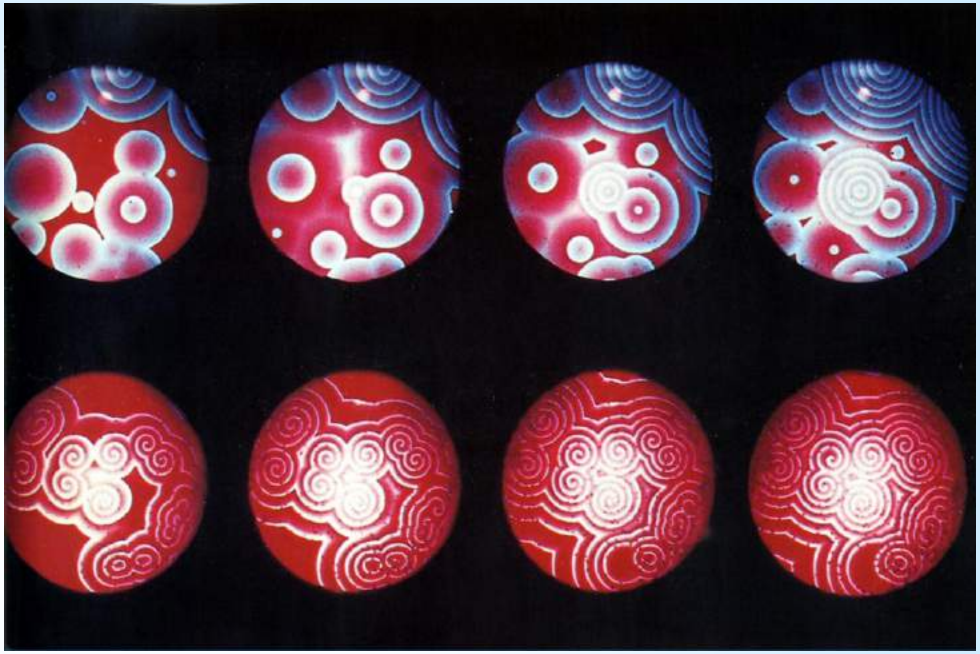
Der Treibhaus-Effekt entsteht, weil die Lufthülle Wärme über der Erdoberfläche festhält. Kohlendioxid, Wasserdampf und andere Gase sind verhältnismäßig durchlässig für Strahlung im sichtbaren und im kurzwelligeren Infrarotbereich, die die meiste Sonnenenergie transportiert. Hingegen absorbieren diese Gase einen großen teil des langwelligen Infrarot., da die Erde ausstrahlt. Diese Energie kehrt fast vollständig als Strahlung zur Erde zurück. Dadurch wärmen die Treibhausgase die Erdoberfläche auf.

Zur Beachtung: die vielfachen Wechselwirkungen und Rückkopplungen.

Andere dynamische Systeme:

„Chemische Schwingungen“ („Uhren) nach Belousov-Zhabotinsky





Nach: Spektrum der Wissenschaften, „Chaos und Fraktale“, Heidelberg, 1989, S. 74

Nach: Geo-wissen, Nr. 3, 1998 „Chaos + Kreativität“, S. 137 Gruhner und Jahr AG, Hamburg

Experimentelle Anordnung

Phasen der „chemischen Schwingungen“

Oszillierende chemische Reaktionen

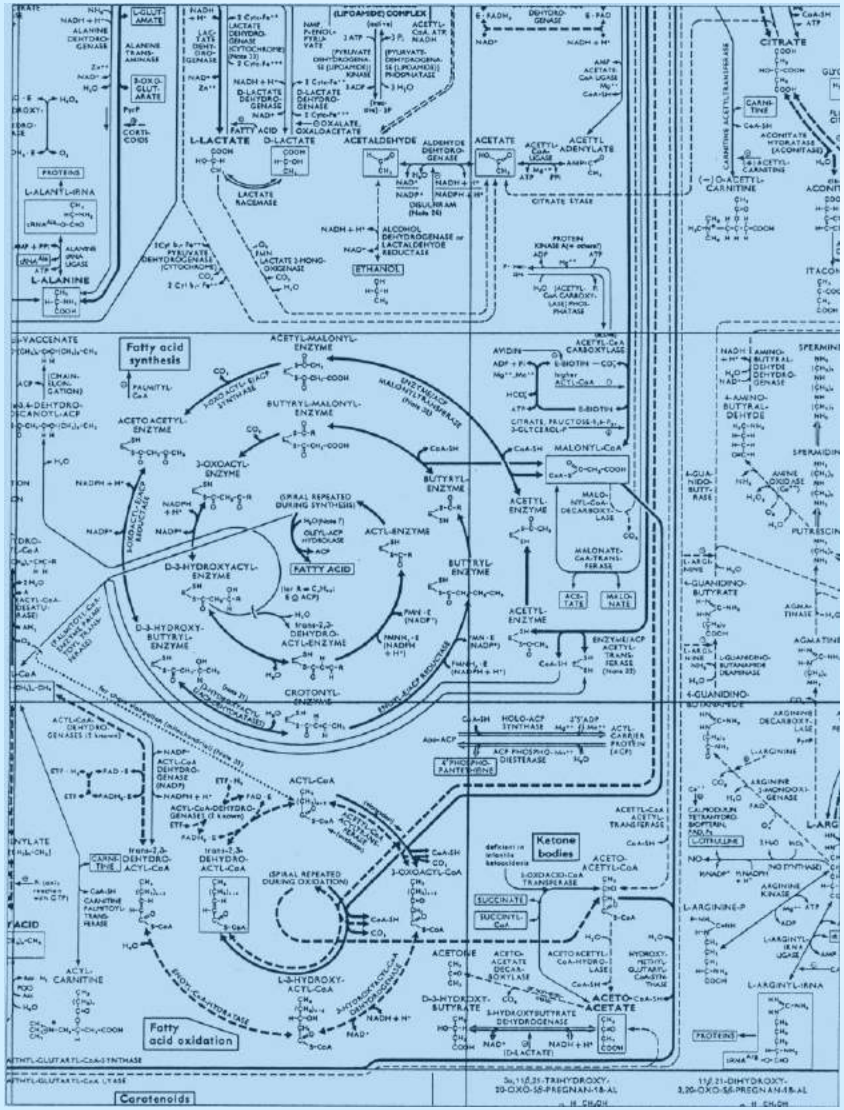
Sie galten einst als „unmöglich“, weil im Widerspruch zu den Naturgesetzen. Heute werden chemische Reaktionen, bei denen die Konzentrationen maßgeblicher Reaktionspartner periodisch steigen und fallen, gezielt entworfen. Mit ihrer Hilfe hofft man, z.b. das Geheimnis biologischer Uhren zu ergründen.

Im hier gezielten Fall bilden Bromid-Ionen Bromid-Moleküle, die dann mit Malonsäure reagieren und wieder zu Bromid werden. Dabei wechselt der Farbstoff Ferroin seine Farbe zwischen blau und rostrot.

Zur Beachtung: die bei den chemischen Schwingungen entstehenden fraktalen Figuren.

Andere dynamische Systeme:

Bio-Chemische Systeme in Organismen



Nach: Chip Special- Bild der Wissenschaft „Faszination Chaos und Fraktale“, Vogel Computer Presse GmbH, München,1995, S. 45

Stoffwechselprozesse im menschlichen Körper
Ausschnitt: 1% der Prozesse

Um Unregelmäßigkeiten und Störungen in den Stoffwechselprozessen ausgleichen zu können, muß das System dynamisch reagieren können.In einem so komplexen System existiert eine große Palette von Verhaltensmöglichkeiten – von regelmäßigen bis zu chaotischen Zuständen

<u>Beachtung:</u>

die Flexibilität des Systems wird durch eine große Zahl von (teils positiv, teils negativ rückgekoppelten) Regelkreisen gewährleistet.

Außerdem ist eine nennenswerte Energiezufuhr erforderlich.

Dynamische Systeme sind überall in der Natur

Dynamische Systeme finden sich in

der Mechanik wechselwirkender Körper, als
- z.B.: reale Pendel,
- z.B.: kosmischen Galaxien,

der Mechanik von Flüssigkeiten, als
- z.B.: Bénardschen Rollzellen,
- z.B.: Meeresströmungen,

Anorganisch-chemischen Systemen, als
- z.B.: chemische Uhren,

Organisch-chemischen Systemen als
- z.B.: sich selbst organisierende DNA, (Hyperzyklus),
- z.B.: Stoffwechselsystemen,

Thermomechanik der Atmosphäre als
- z.B.: Wolkenbildung
- z.B.: „Hoch-“ und „Tief-“Bildung und Bewegung

Der Welt der Pflanzen als
- z.B.: Pflanzenstrukturen,
- z.B.: Pflanzenkulturen (Biotope)

Organstrukturen und -Funktionen von Tier und Mensch als
- z.B.: Gehirnstruktuen
- z.B.: Herz-Kreislauffunktionen

Der Welt der Tiere als
- z.B.: Populationsentwicklungen

usw ... usw ...

<u>die immer gleichen Merkmale von dynamischen Systemen:</u>
- **im (statischen) Gleichgewicht instabil,**
- **stabilisiert sich durch Rückkopplung (Regelung) und**
- **durch Verbrauch von Energie,**
- **tauscht mit seiner Umgebung Information aus,**
- **existiert nur in zeitlich begrenzten Prozessen,**
  d.h. besitzt eine endliche Lebenszeit,
- **erzeugt dabei komplexe Strukturen**

Dynamische Systeme sind simulierbar, mathematisch beschreibbar und nachbildbar

Dynamische Systeme

lassen sich simulieren

- **analog:**
  z.B.: gestörtes Pendel „Decision Maker“
- **digital:**
  z.B.: künstliche Evolution („Uhrmacher“[1])
  z.B.: Klimamodelle,

lassen sich mathematisch beschreiben

Dazu bedarf es einer anderen Mathematik:

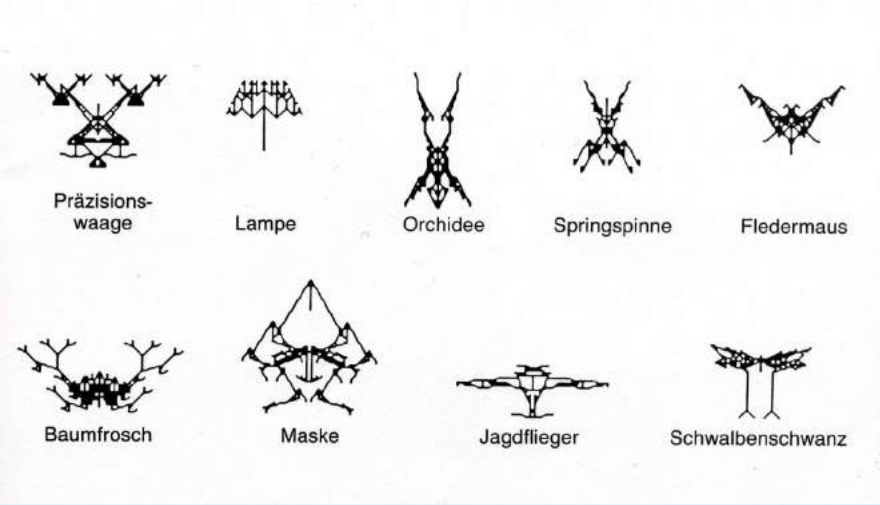
- **„fraktale Mathematik“**

Lassen sich geometrisch nachbilden

- **„fraktale Geometrie“**

die immer gleichen Merkmale von dynamischen Systemen:

- **im (statischen) Gleichgewicht instabil,**
- **stabilisiert sich durch Rückkopplung (Regelung) und**
- **durch Verbrauch von Energie,**
- **tauscht mit seiner Umgebung Information aus,**
- **existiert nur in zeitlich begrenzten Prozessen, d.h. besitzt eine endliche Lebenszeit,**
- **erzeugt dabei komplexe Strukturen**



Vom Programm „Uhrmacher“[1]) erzeugte Biomorphe und andere Gebilde

1) vgl. „Spektrum der Wissenschaft“, Sonderheft 8, „Computer-Kurzweil III“, (1989), S. 42 ff.

„Fraktale Mathematik“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme werden nicht funktional, sondern „iterativ“ mittels Rekursionsformeln beschrieben

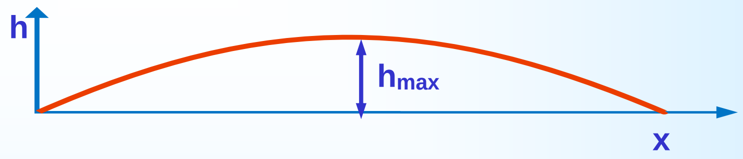
Funktionale Beschreibungen :

Gilt für nicht rückgekoppelte Prozesse, deren Abläufe sich linear überlagern lassen (lineare Wechselwirkung).

Eine Funktion (oft gewonnen durch Integration einer Differentialgleichung) liefert eine vollständige Beschreibung eines Vorganges, z.B. den Ablauf einer harmonischen Schwingung:

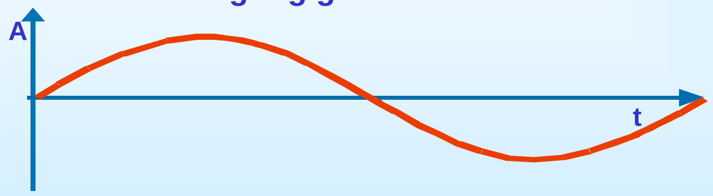
z.B. für die Höhe h einer Wurfbahn gilt über eine Entfernung x:

$h = - x^2 + h_{max}$



z.B. für die Amplitude A einer harmonischen Schwingung gilt für den Verlauf in der Zeit t:

$A = \sin t$



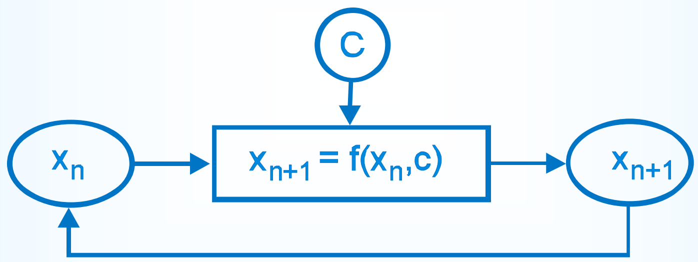
„Fraktale Mathematik“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme werden nicht funktional, sondern „iterativ“ mittels Rekursionsformeln beschrieben

<u>„Iterative“ Beschreibungen</u> :

Gilt für rückgekoppelte Prozesse, deren Abläufe sich nicht linear überlagern lassen (nicht-lineare Wechselwirkung). Natürliche Abläufe sind immer (meist vielfach) rückgekoppelt.

Eine <u>„Rekursionsformel“</u> wird immer wieder durchlaufen („iteriert“), indem das Ergebnis wieder in das Argument eingesetzt wird:



<u>Die Möglichkeiten für den Endwert</u>

1. → stabiler Grenzwert: 0 oder jeder endliche Wert (entspricht funktionaler Lösung)
2. → periodische Bewegungen, mit einfachen oder mehrfachen Schwingungsmaxima
3. → unvorhersagbar: „deterministisches Chaos“

„Fraktale Mathematik“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme werden nicht funktional, sondern „iterativ“ mittels Rekursionsformeln beschrieben

Eine bekannte, besonders einfache Rekursionsformel

beschreibt die sogenannten „Verhulst-Dynamik“[1]:

$$x_{n+1} = const * x_n (1 - x_n)$$

Diese Formel enthält eine Komponente mit positiver Rückkopplung:

$$x_{n+1} = const * x_n$$

und eine Komponente mit negativer Rückkopplung:

$$x_{n+1} = const * (1 - x_n)$$

1) *Pierre François Verhulst 1804 – 1849, belgischer Mathematiker, der sich u.a. mit der Mathematik des Populationswachstums beschäftigte*

„Fraktale Mathematik“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme werden nicht funktional, sondern „iterativ“ mittels Rekursionsformeln beschrieben

Die Möglichkeiten für den Endwert

const. < 1: stabiler Grenzwert = 0;

const. zwischen 1 und <3: stabiler Grenzwert = 2/3 des Anfangswertes x_o;

const. zwischen 3 und 3,569: 2er, 4er und 16er Perioden;

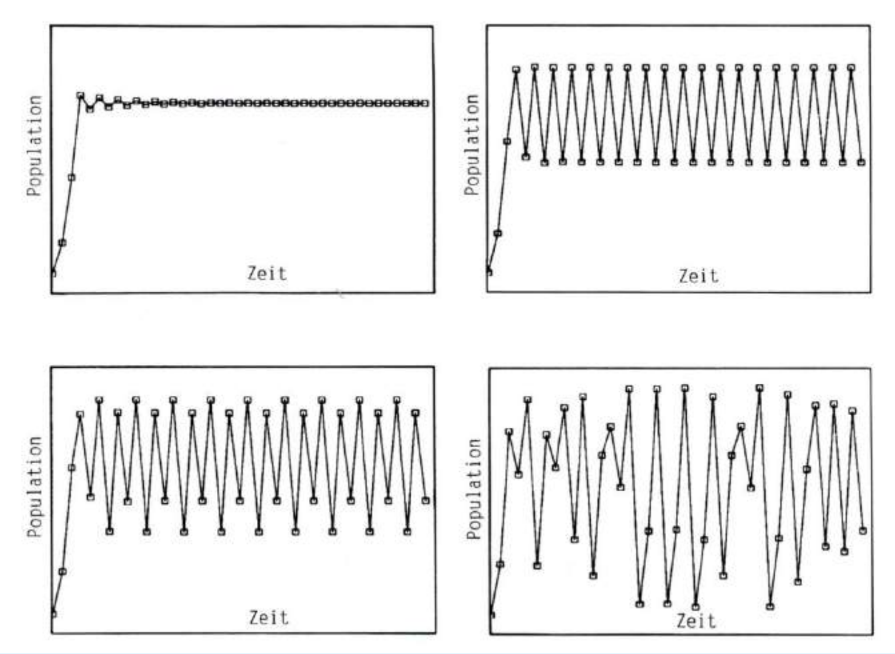
ab kritischem Wert const =3,5699 ist der Endwert unvorhersagbar: „deterministisches Chaos“.

stabiler Grenzwert

2-er Perioden

4-er Perioden

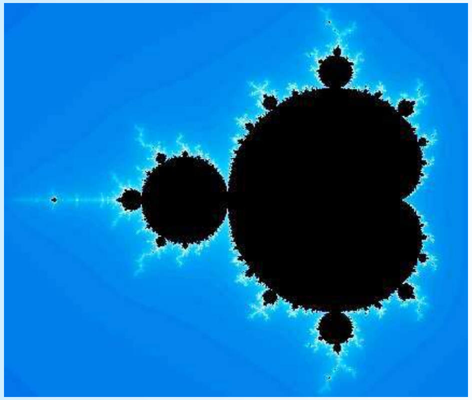
deterministisches Chaos



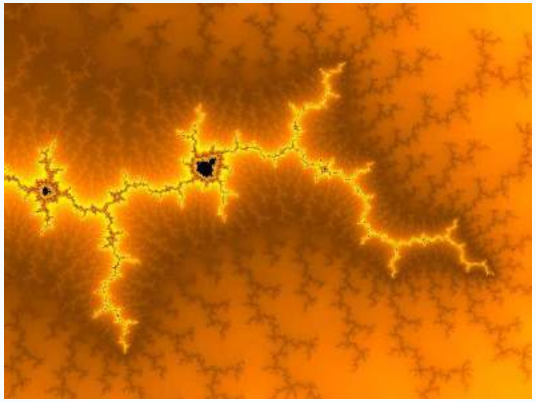
Nach Fr. Cramer „Chaos und Ordnung“, DVA 1989

„Fraktale Mathematik“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen

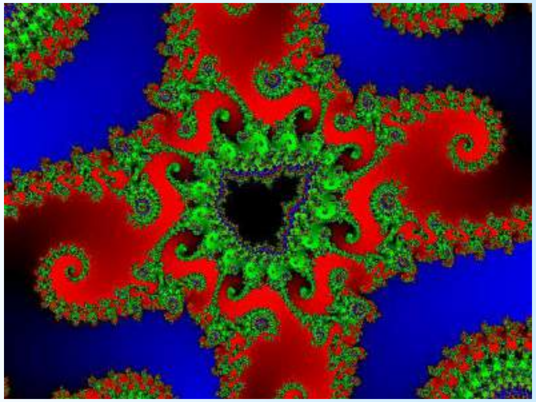
Läßt man bei der „Verhulst-Dynamik“ komplexe Zahlen zu, gelangt man in der komplexen Zahlenebene zu den berühmt gewordenen „Mandelbrotmengen“, die als „Apfelmännchen“ auf dem Computer visualisiert werden können.



Das „Apfelmännchen“



Seitenarm des Apfelmännchen



Detail des Apfelmännchens

Die in diesen Bildern dargestellten Strukturen haben fraktalen Charakter. Beim Vergrößern entstehen im wieder neue, „selbstähnliche“ Strukturen.

Alle Bilder aus dem Intenet: *http://www.ginko.de/user/kremer/karsten/d/mandel.htm*
http://www.ginko.de/user/kremer/karsten/d/ap-gal.htm
http://www.uni-ulm.de/~s_fwinkl/apfel/picindex.html

1) Komplexe Zahlen setzen sich zusammen aus den üblichen sog. „reellen“ Zahlen und den imaginären Zahlen, die aus den reellen Zahlen entstehen, wenn man sie mit $i = \sqrt{-1}$ multipliziert. Sie werden in einer Ebene dargestellt mit den reellen Zahlen auf der x-Achse, die imaginären Zahlen auf der y-Achse.

„Fraktale Mathematik“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen

Mit der gleichen „fraktalen Mathematik“ und mit ähnlich einfachen Formeln wie der der Verhulst-Dynamik, lassen sich natürliche Formen, wie Landschaften, Gebirge, Wolken, Pflanzen usw. verblüffend ähnlich modellieren.

Fraktale Landschaft“

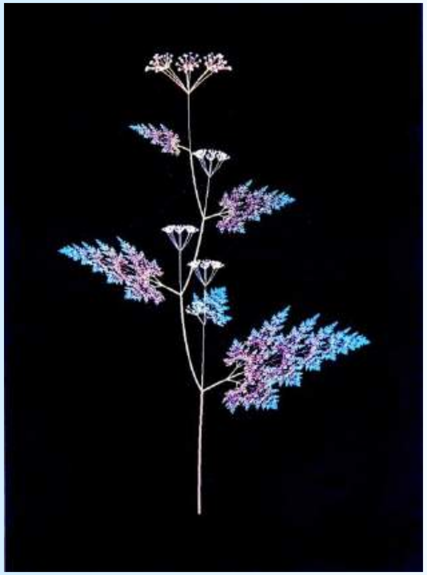
Fraktale Wolken

Die in diesen Bildern dargestellten Strukturen haben fraktalen Charakter. Beim Vergrößern entstehen im wieder neue, „selbstähnliche“ Strukturen.

Beide Bilder aus: B. Mandelbrot, „Die fraktale Geometrie der Natur“, Birkhäuser (1987)

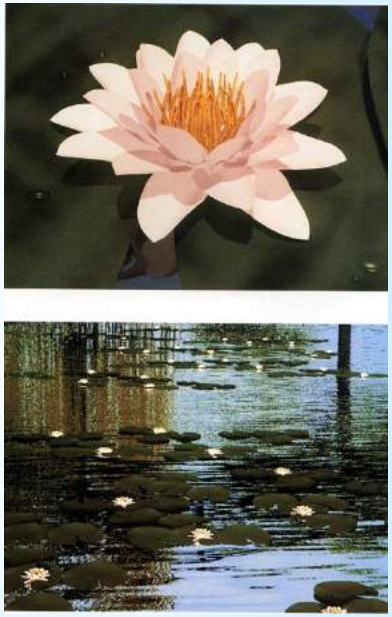
„Fraktale Mathematik“
zur Beschreibung von dynamischen Systemen

Mit der gleichen „fraktalen Mathematik“ und mit ähnlich einfachen Formeln wie der der Verhulst-Dynamik, lassen sich natürliche Formen, wie Wolken, Gebirge, Pflanzen usw. verblüffend ähnlich modellieren.



Wilde Karotte

Sonnenblume



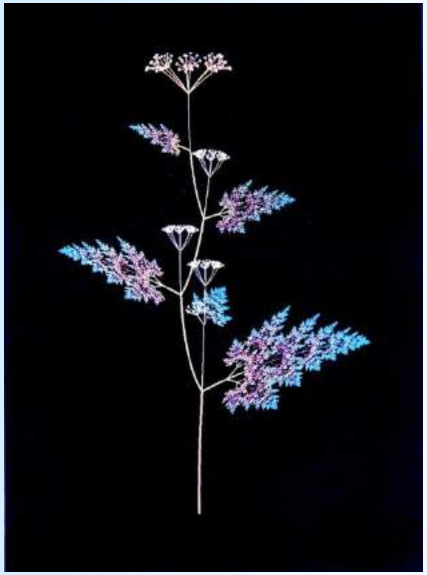
Wasserlilien

Fraktale Pflanzen und Blumen

Alle Bilder aus: P. Prusinkiewicz & A. Lindenmayer, „The Algorithmic Beauty of Plants, Springer (1990)

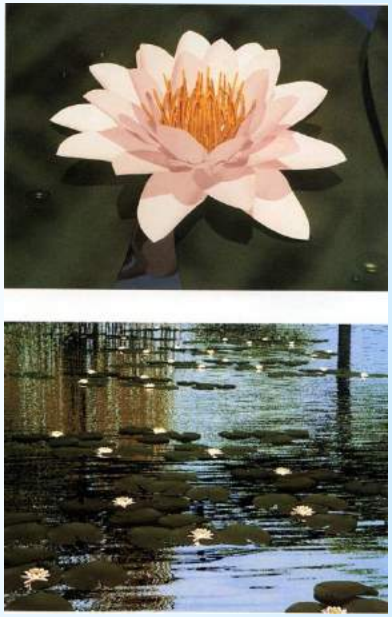
„Fraktale Mathematik“
zur Beschreibung von dynamischen Systemen

Mit der gleichen „fraktalen Mathematik“ und mit ähnlich einfachen Formeln wie der der Verhulst-Dynamik, lassen sich natürliche Formen, wie Wolken, Gebirge, Pflanzen usw. verblüffend ähnlich modellieren.



Wilde Karotte

Sonnenblume



Wasserlilien

Fraktale Pflanzen und Blumen

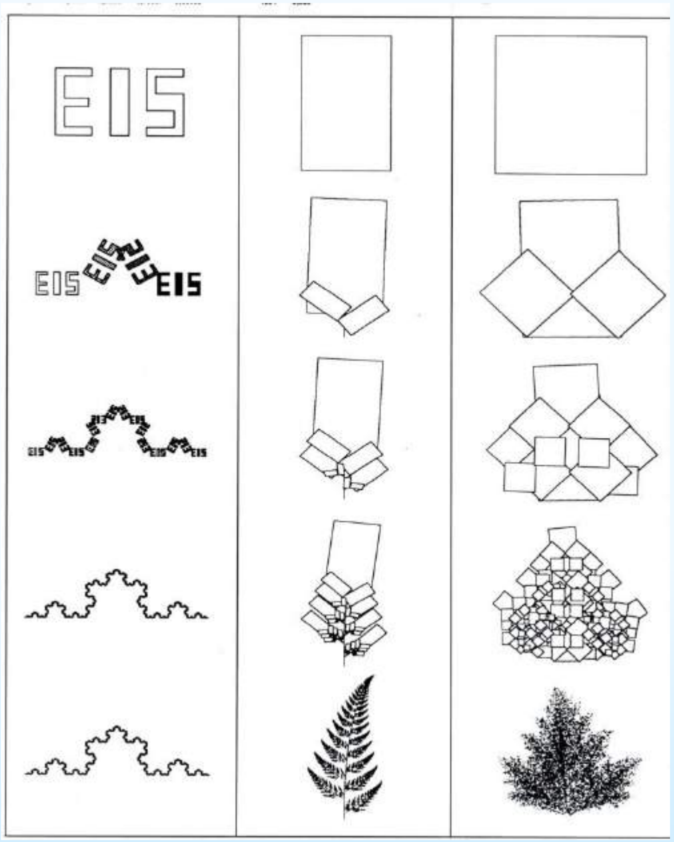
Alle Bilder aus: P. Prusinkiewicz & A. Lindenmayer, „The Algorithmic Beauty of Plants, Springer (1990)

„Fraktale Geometrie“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen

Analog zur „fraktalen Mathematik“ kann man die gleiche Welt der natürlichen und künstlichen Formen mittels

fraktaler Geometrie

aufbauen. Man verwendet dazu verschiedene Falt- und Streckprozesse:



„Kochkurve“ **„Farn“** **„Blatt“**

„Fraktale Mathematik oder Geometrie“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen:

DIE NATUR IST FRAKTAL!

DYNAMISCHE SYSTEME

BESCHREIBEN DIE NATUR

DIE FORMEN DER NATUR

ENTSTEHEN ZWISCHEN ORDNUNG UND CHAOS

die immer gleichen Merkmale von dynamischen Systemen:

- im (statischen) Gleichgewicht instabil,
- stabilisiert sich durch Rückkopplung (Regelung) und
- durch Verbrauch von Energie,
- tauscht mit seiner Umgebung Information aus,
- existiert nur in zeitlich begrenzten Prozessen,
  d.h. besitzt eine endliche Lebenszeit,
- erzeugt dabei komplexe Strukturen = Fraktale

„Fraktale Mathematik“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen Weiterführung

Das deterministische Chaos

Es heißt deswegen „deterministisch,

weil sein Eintreten im voraus berechenbar, also determiniert ist;

Es heißt „Chaos“ , weil die Werte der Berechnung in diesem Bereich

- **nicht vorhersehbar fluktuieren und**
- **äußerst empfindlich von kleinsten Änderungen der Anfangsbedingungen abhängen.**

1. Fall	2. Fall	3. Fall
$x_o = 0.3$	$x_o = 0.3001$	$x_o = 0.301$
$x_1 = 0.84$	$x_1 = 0.84016$	$x_1 = 0.84160$
$x_2 = 0.5376$	$x_2 = 0.53716$	$x_2 = 0.53325$
$x_3 = 0.9943$	$x_3 = 0.99447$	$x_3 = 0.99558$
$x_4 = 0.0225$	$x_4 = 0.02198$	$x_4 = 0.01761$
$x_5 = 0.0879$	$x_5 = 0.08598$	$x_5 = 0.06920$
$x_6 = 0.3208$	$x_6 = 0.31434$	$x_6 = 0.25764$
$x_7 = 0.8716$	$x_7 = 0.86213$	$x_7 = 0.76504$
$x_8 = 0.4476$	$x_8 = 0.47546$	$x_8 = 0.71902$
$x_9 = 0.9890$	$x_9 = 0.99759$	$x_9 = 0.80812$
$x_{10} = 0.0434$	$x_{10} = 0.00961$	$x_{10} = 0.62025$
$x_{11} = 0.1665$	$x_{11} = 0.03808$	$x_{11} = 0.94216$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Nach Walter Seifritz, „Wachstum, Rückkopplung, und Chaos“, Hanser 1987

„Fraktale Mathematik“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen
Weiterführung

Bezug zur Kausalität

Kausalität

ist die Vorstellung, daß jedes Ereignis durch ein vorangegangenes Ereignis (*Ursache, lat. causa*) hervorgerufen wird.

Heute werden zwei Arten dieser Kausalität unterschieden:

Die „Schwache Kausalität“:

„gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen“

Diese Denkweise hat seit Newton die Entwicklung der Naturwissenschaften entscheidend geprägt. Dieser Determinismus führte zum „Laplacesche Dämon“, der bei Kenntnis aller Anfangsbedingungen die Zukunft der gesamten Welt bis in alle Details vorausberechnet.

Zur Erinnerung:

Aristoteles unterschied vier Ursachen:

causa materialis,
causa fomalis,
causa finalis,
causa efficiens.
Nur die vierte, die causa efficiens, ist im naturwissenschaftlichen Denken erhalten geblieben.

Jedoch: kein Flugzeug könnte je sicher gesteuert werden, keines Jägers Pfeil oder Kugel hätte je sein Ziel erreicht, weil die Anfangsbedingungen nie exakt die gleichen bleiben.

Deshalb muß es für die Bewältigung der realen Welt noch ein anders Prinzip geben:

Die „Starke Kausalität“:

„ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen“

Davon hat die klassische Physik starken Gebrauch gemacht und für alle – oft gegebenen Situationen mit nur kleinen Abweichungen der Anfangsbedingungen – die mathematische Beschreibung „linearisiert“. Die so gewonnenen Gleichungssysteme konnten mit den Methoden der Differential- und Integralrechnung zur funktionalen Beschreibung (siehe dort) von vielen Vorgängen in Natur und Technik benutzt werden.

„Fraktale Mathematik“ zur Beschreibung von dynamischen Systemen Weiterführung

Die Verletzung der starken Kausalität

Im Bereich des chaotischen Verhaltens wir bei dynamischen Systemen die starke Kausalität, von der die klassische Physik wesentlich lebt, verletzt.

Die schwache Kausalität bleibt zwar erhalten, aber wegen des nicht vorhersagbaren Einflusses kleinster Abweichungen der Anfangs-Bedingungen können kleinste Ursachen unerwartete, große Wirkungen hervorrufen.

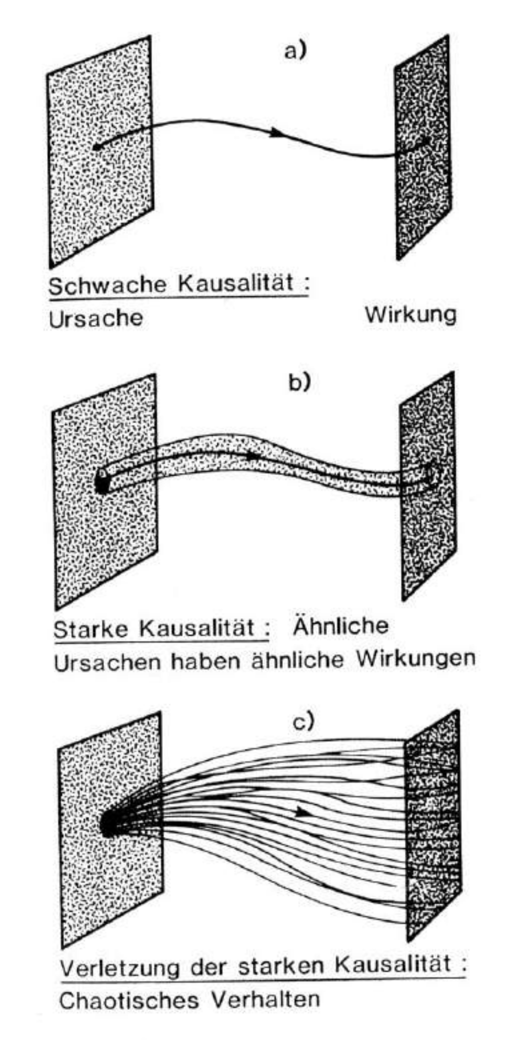
Seit der Entdeckung diese Effektes im Jahr 1960 durch den am Massachusetts Institute of Technology forschenden Meterologen Edward Lorenz spricht man vom

Schmetterlingseffekt:

"Schon der Flügelschlag eines Schmetterlings über Hong-Kong kann einen Orkan über Alaska auslösen."

formulierte Edward Lorenz, als er an Hand von Computer-Simulationen der Wetterentwicklung erkannte:

„Kleinste Unterschiede in den Anfangsbedingungen dynamischer Systeme - wie etwa der Atmosphäre - können sich offensichtlich nach kurzer Zeit zu großen Wirkungen aufschaukeln“



Nach Decker und Thomas, „die Chaostheorie“, Bild der Wissenschaft, 1-1983